Grado en Física

Ejercicios de Análisis Matemático I

Desigualdades, funciones elementales, números complejos - Soluciones

1. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica la siguiente desigualdad.

$$\frac{x^2 - 4x - 2}{x^3 + 1} > 0.$$

Solución. Sabemos que al multiplicar una desigualdad por un número positivo se obtiene otra desigualdad equivalente a la dada. Por tanto, si a y b son números reales con $b \neq 0$, tenemos que:

$$\frac{a}{b} > 0 \Longleftrightarrow \frac{a}{b} b^2 = ab > 0.$$

En consecuencia, la desigualdad del enunciado es equivalente a:

$$h(x) = (x^2 - 4x - 2)(x^3 + 1) > 0.$$

Como h es una función polinómica, sabemos que sus raíces[1] determinan intervalos en donde la función es siempre positiva o siempre negativa. Evidentemente, las raíces de h son las soluciones de alguna de las ecuaciones

$$x^2 - 4x - 2 = 0, \qquad x^3 + 1 = 0.$$

Las soluciones de la primera ecuación son:

$$\alpha = \frac{4 - \sqrt{24}}{2} = 2 - \sqrt{6}, \qquad \beta = \frac{4 + \sqrt{24}}{2} = 2 + \sqrt{6}.$$

La segunda ecuación tiene una solución evidente, $x = -1$. Dividiendo por Rufini resulta:

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

El trinomio $x^2 - x + 1$ tiene discriminante negativo, por lo que no tiene raíces reales, es decir, su gráfica no corta al eje de abscisas, y es siempre positivo, $x^2 - x + 1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Tenemos que:

$$h(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x + 1)(x^2 - x + 1) > 0 \Longleftrightarrow p(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x + 1) > 0.$$

Como $-1 < \alpha < \beta$, deducimos que:

$$\begin{aligned}
x < -1 \quad &\Longrightarrow \quad p(x) < 0 \text{ porque es producto de tres números negativos.}\\
-1 < x < \alpha \quad &\Longrightarrow \quad p(x) > 0 \text{ porque es producto de un número positivo y dos negativos.}\\
\alpha < x < \beta \quad &\Longrightarrow \quad p(x) < 0 \text{ porque es producto de dos números negativos y uno positivo.}\\
\beta < x \quad &\Longrightarrow \quad p(x) > 0 \text{ porque es producto de tres números positivos.}
\end{aligned}$$

Concluimos que la desigualdad del enunciado es cierta para valores de x en $]-1, \alpha[\cup]\beta, +\infty[$. ☺

Comentario. No es buena estrategia en este tipo de ejercicios estudiar por separado los intervalos en donde el numerador o el denominador son siempre positivos o siempre negativos. Esa forma de proceder complica innecesariamente las cosas.

El signo de $p(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x + 1)$ en cada intervalo puede estudiarse de muchas formas. Podemos evaluar $p(x)$ en un punto de cada intervalo (es la forma más larga y que requiere más cálculos). También podemos observar que $p(x)$ es un polinomio con coeficiente líder positivo, por lo que para valores de x positivos y muy grandes será $p(x) > 0$, lo que nos dice que para $x > \beta$ es $p(x) > 0$.

[1] Se entiende que solamente consideramos raíces reales.

Ahora, como las raíces de $p(x)$ son simples, se produce un cambio de signo en cada una de ellas y volvemos a obtener el mismo resultado anterior.

Debes simplificar siempre que sea posible. Por ejemplo, si no simplificas la expresión $\alpha = \dfrac{4-\sqrt{24}}{2}$ no podrás comparar fácilmente α con -1, y necesitas poderlo hacer para ordenar las raíces.

Debes explicar lo que haces de forma clara y con las palabras precisas. Si en un ejercicio no explicas lo que haces, obligas a que quien lo evalúe tenga que interpretarlo, lo que lleva tiempo y no predispone a tu favor sino todo lo contrario. Debes exponer tus resultados de forma que sean fáciles de leer y que quien los lea no tenga que adivinar qué es lo que quieres hacer.

Casi nadie ha factorizado el polinomio x^3+1 aunque todos sabéis que -1 es una raíz del mismo.

2. Calcula el dominio natural de definición de la función $f(x)=\sqrt{\log\big(|x-6|(1+|x-3|)\big)}$.

Solución. El dominio natural de definición de una función que viene dada por medio de una expresión, $f(x)$, es el conjunto más grande de números reales donde dicha expresión tiene sentido como número real. En nuestro caso será el conjunto:

$$\mathcal{D}=\big\{x\in\mathbb{R}:\log\big(|x-6|(1+|x-3|)\big)\geqslant 0\big\}=\{x\in\mathbb{R}:|x-6|(1+|x-3|)\geqslant 1\}.$$

Para estudiar la desigualdad $|x-6|(1+|x-3|)\geqslant 1$, lo que vamos a hacer es quitar los valores absolutos y para ello consideraremos que x sea mayor o menor que 3 y mayor o menor que 6. Tenemos así las siguientes posibilidades:

- Caso en que $x\leqslant 3$. Tenemos que:

$$|x-6|(1+|x-3|)\geqslant 1 \Longleftrightarrow (6-x)(1+3-x)\geqslant 1 \Longleftrightarrow x^2-10x+23\geqslant 0.$$

Las raíces de $x^2-10x+23=0$ son $a=5-\sqrt{2}$, $b=5+\sqrt{2}$. Tenemos que $x^2-10x+23\geqslant 0$ cuando sea $x\leqslant a$ o $x\geqslant b$. Como estamos considerando que $x\leqslant 3$, no puede ser $x\geqslant b$; y la condición $x\leqslant a$ se cumple porque $3<a$ y $x\leqslant 3$. Concluimos que la desigualdad estudiada es cierta para $x\leqslant 3$.

- Caso en que $3\leqslant x\leqslant 6$. Tenemos que:

$$|x-6|(1+|x-3|)\geqslant 1 \Longleftrightarrow (6-x)(1+x-3)\geqslant 1 \Longleftrightarrow x^2-8x+13\leqslant 0.$$

Las raíces de $x^2-8x+13=0$ son $c=4-\sqrt{3}$, $d=4+\sqrt{3}$. Tenemos que $x^2-8x+13\leqslant 0$ cuando $x\in[c,d]$. Como estamos considerando que $x\in[3,6]$, debemos imponer que ambas condiciones se cumplan. Ello es así cuando $x\in[c,d]\cap[3,6]=[3,d]$, donde hemos tenido en cuenta que $c<3<d<6$. Concluimos que la desigualdad estudiada es cierta para $3\leqslant x\leqslant 4+\sqrt{3}$.

- Caso en que $6\leqslant x$. Tenemos que:

$$|x-6|(1+|x-3|)\geqslant 1 \Longleftrightarrow (x-6)(1+x-3)\geqslant 1 \Longleftrightarrow x^2-8x+11\geqslant 0.$$

Las raíces de $x^2-8x+11=0$ son $u=4-\sqrt{5}$, $d=4+\sqrt{5}$. Tenemos que $x^2-8x+13\geqslant 0$ cuando $x\leqslant u$ o $x\geqslant v$. Como estamos considerando que $x\geqslant 6$, y tenemos que $u<6<v$, no puede ser $x\leqslant u$. Deberá ser $x\geqslant v$, con lo cual también se verificará que $x\geqslant 6$. Concluimos que la desigualdad estudiada es cierta para $x\geqslant 4+\sqrt{5}$.

Del estudio anterior se deduce que:

$$\mathcal{D}=\{x\in\mathbb{R}:|x-6|(1+|x-3|)\geqslant 1\}=]-\infty,4+\sqrt{3}]\cup[4+\sqrt{5},+\infty[.$$

☺

Comentario. Hay otras formas más directas de estudiar la desigualdad, pero creo que la que he seguido es la que todos debíais conocer porque hemos hecho ejemplos parecidos en clase y en mis apuntes también hay ejemplos similares. Los fallos principales en este ejercicio son de cálculo y también causados por no simplificar las raíces. Algunos no habéis entendido que en cada caso considerado debe estudiarse la compatibilidad entre las condiciones obtenidas para la variable x y la hipótesis inicial hecha sobre x.

En los ejercicios hay que responder a lo que se pregunta. No es correcto hacer una discusión caso por caso y no decir cuál es el dominio de la función.

Vuelvo a insistir que en esta asignatura no usamos números decimales.

3. Prueba que la función $f : [1/2, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - x + 1$ para todo $x \geqslant 1/2$, es estrictamente creciente. Calcula la función inversa de f.

Solución. Para probar que la función es estrictamente creciente supondremos que $1/2 \leqslant x < y$ y probaremos que $f(x) < f(y)$. Tenemos que:

$$f(y) - f(x) = y^2 - y + 1 - (x^2 - x + 1) = y^2 - x^2 - (y - x) = (y - x)(y + x - 1) > 0.$$

Donde hemos usado que $y-x > 0$ (por hipótesis) y que, al ser $1/2 \leqslant x < y$, se tiene que $x+y-1 > 0$. Hemos probado que f es estrictamente creciente (y por tanto es inyectiva). Para calcular su inversa debemos tomar un valor y en la imagen de f y calcular el único valor de $x \geqslant 1/2$ tal que $f x) = y$. Como $f(1/2) = 3/4$, y f es estrictamente creciente su imagen es el intervalo $[3/4, +\infty[$. Sea, pues, $y \geqslant 3/4$. Calculemos x de forma que $f(x) = y$ y no olvidemos que debe ser $x \geqslant 1/2$. Tenemos que:

$$f(x) = y \Longleftrightarrow x^2 - x + 1 - y = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1 - y)}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{4y - 3}}{2}$$

Es obligado elegir la solución dada por:

$$x = f^{-1}(y) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{4y - 3}}{2}.$$

Observa que, al ser $y \geqslant 3/4$, se tiene que $4y - 3 \geqslant 0$ por lo que está definida la raíz cuadrada. ☺

Comentario. Para mi sorpresa este ejercicio, que me parece fácil, casi nadie lo ha hecho completamente bien. Hicimos en clase uno casi igual. Muchos usáis derivadas para probar la monotonía. Eso es matar moscas a cañonazos. En las relaciones de ejercicios se supone que deben usarse las herramientas que se han visto en la correspondiente teoría. Si tienes dudas respecto de lo que puedes usar lo mejor es que me lo preguntes. Lo que me interesa en la primera parte de este ejercicio es que trabajes con desigualdades para probar la monotonía. Claro está, si usas derivadas lo que haces es correcto, pero no es eso lo que quiero evaluar.

Hay quien asegura que f no tiene inversa, como si la pregunta que hago fuera engañosa. Ya sabéis lo que opino al respecto.

Algunos afirman que la función es estrictamente creciente pero no es inyectiva. Insisto en algo dicho en clase: nunca hay que olvidar el conjunto donde se considera definida una función.

No es correcto usar una gráfica para probar propiedades de una función. Eso es hacer trampa porque la gráfica solamente puede hacerse cuando se conocen las propiedades de la función (crecimiento, convexidad...).

No es correcto usar ejemplos concretos para deducir de ellos un comportamiento general: si pruebas que $f(1) < f(2)$ no puedes deducir solamente de eso que f es creciente.

4. Dado un número entero $n \in \mathbb{Z}$, justifica que la función $f : [n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$, es inyectiva y expresa la inversa de f por medio de la función arcoseno. Representa gráficamente la función $h(x) = \operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x)$ para $x \in [-3\pi - \pi/2, 3\pi + \pi/2]$.

Solución. Debemos probar que si $x, y \in [n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2]$ con $x \neq y$, entonces $f(x) \neq f(y)$, es decir, $\operatorname{sen} x \neq \operatorname{sen} y$. Lo que podemos usar en este ejercicio son las propiedades que hemos visto en clase de la función seno. Sabemos que la función seno es estrictamente creciente en $[-\pi/2, \pi/2]$. La idea consiste en deshacer la traslación del intervalo: los puntos $x - n\pi$, $y - n\pi$ están en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ y son distintos por ser $x \neq y$, luego se tiene que:

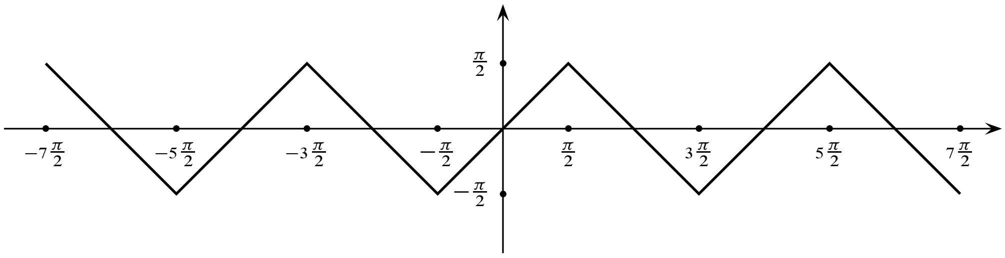
$$\operatorname{sen}(x - n\pi) \neq \operatorname{sen}(y - n\pi) \iff (-1)^n \operatorname{sen} x \neq (-1)^n \operatorname{sen} y \iff f(x) = \operatorname{sen} x \neq \operatorname{sen} y = f(y).$$

Hemos probado así que f es inyectiva. Pero, realmente, hemos probado algo más porque hemos visto que si $x \in [n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2]$ entonces $x - n\pi \in [-\pi/2, \pi/2]$ y $\operatorname{sen}(x - n\pi) = (-1)^n \operatorname{sen} x$. Luego, si n es par resulta, por definición de la función arcoseno, que $\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x) = x - n\pi$. Si n es impar se tiene que $\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x) = n\pi - x$. Hemos obtenido que si n es par se verifica que $x = \operatorname{arc\,sen}(f(x)) + n\pi$ para todo $x \in [n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2]$, lo que nos dice que la función inversa de f viene dada por $f^{-1}(y) = \operatorname{arc\,sen} y + n\pi$ para todo $y \in [-1, 1]$ (es inmediato que la imagen de f es el intervalo $[-1, 1]$). Análogamente, si n es impar se verifica que $x = -\operatorname{arc\,sen}(f(x)) + n\pi$, lo que nos dice que la función inversa de f viene dada por $f^{-1}(y) = -\operatorname{arc\,sen} y + n\pi$ para todo $y \in [-1, 1]$.

Para representar gráficamente la función $h(x) = \operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x)$ para $x \in [-3\pi - \pi/2, 3\pi + \pi/2]$, usaremos lo antes visto:

$$x \in [n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2] \Longrightarrow \operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x) = \begin{cases} x - n\pi, & \text{si } n \text{ es par.} \\ n\pi - x, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Se obtiene así la siguiente gráfica.



☺

Comentario. Este ejercicio no lo ha hecho casi nadie. Lo que no entiendo es que se afirme que la función inversa de f es la función arcoseno. Eso solamente es cierto cuando $n = 0$ porque la función arcoseno toma valores en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Peor todavía es afirmar que $\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x) = x$ para todo $x \in [3\pi - \pi/2, 3\pi + \pi/2]$ cuando en la representación gráfica se ve claramente que eso no es cierto.

5. Calcula los números complejos $z = x + iy$ tales que $w = \dfrac{2z - i}{z - 2i}$ es:

a) Un número real.

b) Un número imaginario puro.

c) Un número de módulo 1.

Solución. Pongamos $z = x + iy$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} w &= \frac{2x + i2y - i}{x + iy - 2i} = \frac{(2x + i(2y - 1))(x - i(y - 2))}{x^2 + (y - 2)^2} = \frac{2x^2 + (2y - 1)(y - 2) + i((2y - 1)x - 2x(y - 2))}{x^2 + (y - 2)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 2y^2 - 5y + 2}{x^2 + (y - 2)^2} + i\frac{3x}{x^2 + (y - 2)^2}. \end{aligned}$$

Por tanto:

$$w \text{ es real} \iff \operatorname{Im}(w) = 0 \iff x = 0 \iff z \text{ es imaginario puro.}$$

$$w \text{ es imaginario puro} \iff \operatorname{Re}(w) = 0 \iff 2x^2 + 2y^2 - 5y + 2 = 0.$$

La ecuación

$$2x^2 + 2y^2 - 5y + 2 = 0 \iff x^2 + y^2 - \frac{5}{2}y + 1 = 0 \iff x^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

representa una circunferencia de centro $(0, 5/4)$ y radio $3/4$.

Usando que el módulo de un cociente es el cociente de los módulos, tenemos que:

$$|w|=1 \Longleftrightarrow |w|^2=\frac{4x^2+(2y-1)^2}{x^2+(y-2)^2}=1 \Longleftrightarrow 4x^2+(2y-1)^2=x^2+(y-2)^2 \Longleftrightarrow x^2+y^2=1 \Longleftrightarrow |z|=1.$$

☺

Comentario. Hemos hecho en clase ejercicios casi iguales a este. Lo único que hay que saber es operar con números complejos. Los fallos que hay son de cálculo.

6. Expresa los siguientes números en forma cartesiana:

$$\text{a) } (-1+i\sqrt{3})^{11} \quad \text{b) } \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^6 \quad \text{c) } (-\sqrt{3}+i)^{13}$$

Solución. Para calcular potencias de números complejos se usa la fórmula de De Moivre.

a) Pongamos $z=-1+i\sqrt{3}$. Este número complejo está en el segundo cuadrante, por tanto su argumento principal estará comprendido entre $\pi/2$ y π y viene dado por:

$$\arg(z) = \operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{3}) + \pi = -\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3}) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}.$$

Tenemos también que $|z| = 2$. Por tanto:

$$\begin{aligned} z^{11} &= 2^{11}\left(\cos\frac{22\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{22\pi}{3}\right) = 2^{11}\left(\cos(7\pi+\pi/3) + i \operatorname{sen}(7\pi+\pi/3)\right) = \\ &= 2^{11}\left(-\cos(\pi/3) - i \operatorname{sen}(\pi/3)\right) = 2^{11}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2^{10}(1+i\sqrt{3}). \end{aligned}$$

b) Pongamos $w = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$. Para calcular un argumento de w usaremos que si a y b son números complejos, s es un argumento de a y t es un argumento de b, entonces $s-t$ es un argumento de a/b. Tenemos:

$$\arg(1+i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3},\ \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4} \Longrightarrow \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{7\pi}{12}.$$

Por tanto $7\pi/12$ es un argumento de w. (resulta, además, que es el argumento principal, pero esto es lo de menos). Como $|w| = 2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$, la fórmula de De Moivre nos dice que:

$$w^6 = (\sqrt{2})^6\left(\cos(42\pi/12) + i \operatorname{sen}(42\pi/12)\right) = 8\left(\cos(3\pi+\pi/2) + i \operatorname{sen}(3\pi+\pi/2)\right) = -8i.$$

c) Es muy parecido al apartado a). ☺

7. Calcula todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } z^4 = -1 \qquad \text{b) } z^3 = -i \qquad \text{c) } z^4 - i\sqrt{3}\,z^2 - 1 = 0$$

Solución. a) Nos piden calcular las raíces cuartas de -1. Como $\arg(-1) = \pi$ y, claro está, $|-1| = 1$, tenemos que las raíces cuartas de -1 son:

$$z_k = \cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Podemos calcular fácilmente sus valores, pues $z_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ y las demás se obtienen a partir de z_0

por giros de amplitud $\pi/2$ radianes. Un giro de amplitud $\pi/2$ es lo mismo que multiplicar por i. Luego:

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}} \\ z_1 &= i\,z_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}} \\ z_2 &= i\,z_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\,\frac{1}{\sqrt{2}} \\ z_3 &= i\,z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\,\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

b) Nos piden calcular las raíces terceras de $-i$. Como $\arg(-i) = -\pi/2$ y $|-i| = 1$, tenemos que las raíces terceras de $-i$ son:

$$z_k = \cos\left(\frac{-\pi/2 + 2k\pi}{3}\right) + i\,\operatorname{sen}\left(\frac{-\pi/2 + 2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Podemos calcular fácilmente sus valores:

$$\begin{aligned} z_0 &= \cos(-\pi/6) + i\,\operatorname{sen}(-\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2} \\ z_1 &= \cos(\pi/2) + i\,\operatorname{sen}(\pi/2) = i \\ z_2 &= \cos(\pi/2 + 2\pi/3) + i\,\operatorname{sen}(\pi/2 + 2\pi/3) = -\operatorname{sen}(2\pi/3) + i\,\cos(2\pi/3) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2} \end{aligned}$$

c) Es una ecuación bicuadrada; para resolverla hacemos el cambio $z^2 = w$ y calculamos las soluciones de la ecuación $w^2 - i\sqrt{3}\,w - 1 = 0$, que vienen dadas por la fórmula usual:

$$\alpha = \frac{i\sqrt{3} + \sqrt{(-i\sqrt{3})^2 + 4}}{2} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}; \quad \beta = \frac{i\sqrt{3} - \sqrt{(-i\sqrt{3})^2 + 4}}{2} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

Debemos ahora resolver las ecuaciones $z^2 = \alpha$ y $z^2 = \beta$, es decir, calcular las raíces cuadradas de α y β. Tenemos que $\arg(\alpha) = \pi/3$, $\arg(\beta) = 2\pi/3$, ambos complejos tienen modulo 1. Por tanto, las soluciones de la ecuación son:

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{\alpha} = \cos(\pi/6) + i\,\operatorname{sen}(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2} \\ z_2 &= -\sqrt{\alpha} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2} \\ z_3 &= \sqrt{\beta} = \cos(2\pi/6) + i\,\operatorname{sen}(2\pi/6) = \cos(\pi/3) + i\,\operatorname{sen}(\pi/3) = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_4 &= -\sqrt{\beta} = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

☺

Comentarios. Pocos son quienes han hecho bien estos dos últimos ejercicios. Debe ser muy difícil hacer potencias y calcular raíces complejas. En cada caso hay que aplicar la fórmula correspondiente y para aplicarla hay que calcular argumentos y para eso hay que aplicar otra fórmula...¡Uf! Demasiado. Hay que pensar un poco...¡Que lo hagan los ordenadores!

Algunos trabajan en grados. Repito en esta asignatura se trabaja con radianes. Quien quiera trabajar en grados deberá ser coherente y usar solamente grados. Por tanto en vez de escribir $\operatorname{sen}(90°) = 1$, expresión en la que se están usando dos unidades de medida: el grado y la unidad (es decir, el radian); debe escribir $\operatorname{sen}(90°) = (180/\pi)°$ porque así todo está en grados. Hay quien usa una notación disparatada, según la cual $1_{30} = \cos(30) + i\ \mathrm{sen}(30)$, cuando lo correcto es escribir $\mathrm{e}^{i\pi/6} = \cos(\pi/6) + i\ \mathrm{sen}(\pi/6)$. Hay algunas delicatessen que quiero compartir con vosotros (y que se dé por aludido quien corresponda). Por ejemplo, hay quien afirma que un argumento de un cociente es el cociente de los argumentos. Otros dicen que:

$$\mathrm{sen}(\pi) = 1, \qquad \sqrt[3]{1} = \pm 1, \qquad , |-\sqrt{3} + i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + i^2} = \sqrt{-3-1} = \sqrt{-4}$$

A veces, un doble error compensa un disparate: $|-i| = \sqrt{0^2 + (-i)^2} = \sqrt{1} = 1$. Por supuesto, varios afirman que $(x + i(y-2))(x - i(y-2)) = x^2 - (y-2)^2$. Después de mis advertencias en clase tenía la esperanza de que este curso nadie cayera en tan grosero disparate. Pues no.

Muchos no saben que el seno y la tangente son funciones impares y el coseno es par y por eso no saben lo que vale $\cos(-\pi)$ o $\operatorname{arc\,tg}(-1)$ o $\mathrm{sen}(-\pi/3)$.

Bueno, bonito, barato. ¡Que siga la fiesta!